EXERCICE N°1 : 40' 5 points

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-\left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z-4e^{i\frac{\pi}{6}}=0$.

1°) a) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=i\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) Vérifier que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

c) Trouver alors l'autre solution de z_2 de l'équation (E).

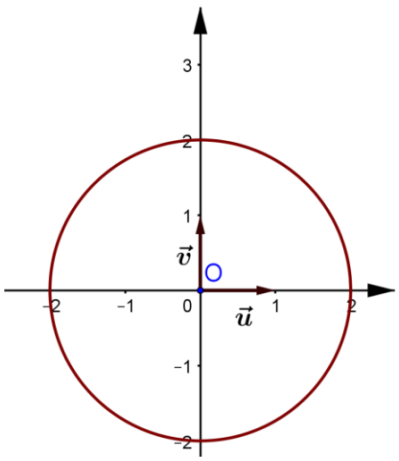
d) Écrire chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A=1+i\sqrt{3}$ et $z_B=-\sqrt{3}+i$.

a) Vérifier que $z_B=iz_A$.

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle.

c) Construire, dans la figure ci-contre, les points A et B.



3°) Soit C le point du plan d'affixe $z_C=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

a) Montrer que $OACB$ est un carré.

b) Placer le point C.

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

EXERCICE N°2 : 50' 5 points

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1): $z^2+(2+i)z+i=0$.

2°) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^3+(1+i)z^2-2z-i=0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3+(1+i)z^2-2z-i=(z-1)(z^2+az+b).$$

c) En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E).

3°) Dans Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_C=1$.

a) Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Montrer que les points A et B appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Construire les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4°) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E = z_A - 1$ et $z_F = z_B - 1$.

a) Montrer que $OEAC$ et $OFBC$ sont des parallélogrammes.

b) Construire alors E et F.

c) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{i\frac{7\pi}{6}} - 1$.

d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1)

EXERCICE N°3 : 40' 5 points

I– On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $(E): \frac{1}{4}z^2 - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z - i = 0$.

1°) Vérifier que : $z_1 = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est une solution de l'équation (E).

2°) Déterminer alors l'autre solution z_2 de l'équation (E) puis vérifier que : $z_2 = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II– Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique **2cm**)

Soit A le point d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$.

1°) Montrer que : $Z_H = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_k = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2°) A tout M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-4}{z}$.

a) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $OM \times OM' = 4$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi - \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

3°) Soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectives de H' et K' tels que : $z_{H'} = \frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$.

a) Montrer que $Z_{H'} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_{K'} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Construire les points H' et K'. (Justifier)

EXERCICE N°4 : 40' 5 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$.

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

d) En déduire les solutions : $z^6 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^4 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z^2 - 8i = 0$.

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $2i$, $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$.

a) Représenter dans le repère les points *A*, *B* et *C*.

b) Montrer que *OABC* est un losange.

3°) Soit *D* le point d'affixe $d=\dfrac{(\sqrt{3}+i)+(-1+i\sqrt{3})\tan\theta}{2}$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Mettre sous forme exponentielle $1+i\tan\theta$.

b) En déduire que : $d=\dfrac{1}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{6}+\theta)}$.

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle *A*, *B*, *C* et *D* soient sur un même cercle.

EXERCICE N°5 : 50' 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et (-1) .

A tout point M d'affixe z on nul , on associe le point M' d'affixe $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z}$

1°) a) Vérifier que B est le seul point invariant par f

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que $f(z)$ est réel

2°) On pose $z=e^{i\theta}$ où $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $|f(z)-z|=|z+1|$

b) Déduire une construction du point M' à partir du point M

c) Montrer que $f(e^{i\theta})=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$

d) Calculer f($\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$) et déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

e) Déterminer θ pour que le triangle OMM' soit un triangle isocèle en O

3°) On pose $z=re^{i\theta}$ où r est un réel >1 et $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ .Soit I le point d'affixe i

a) Montrer que $|f(z)-1|=r^2+\dfrac{1}{r^2}+2\cos2\theta$

b) Montrer que si le point M' se déplace sur le cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon 2 le point M se déplace sur un cercle ($\mathscr{C}'$) de centre I dont on précisera son rayon.